

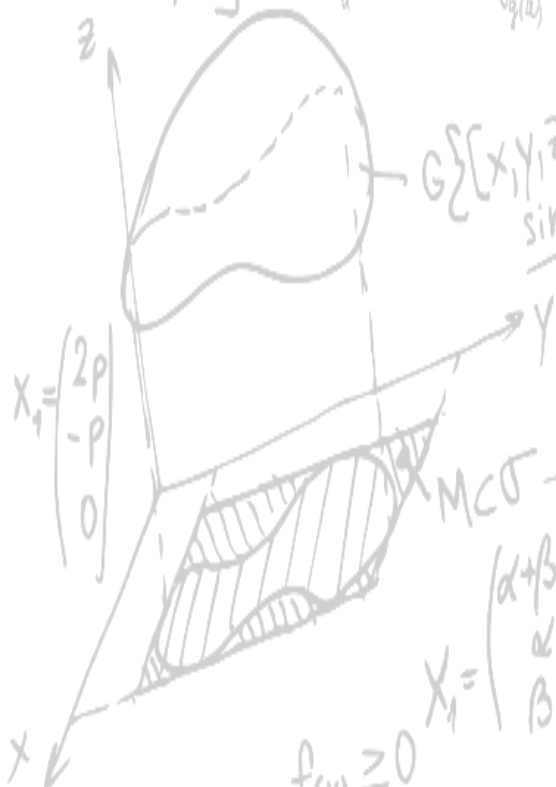
$$A = [1; 0; 3]$$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = [F(t)]_{g(a)}^{g(b)}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = (U, V)$$

$$G\{[x, y, z] \in E_3 : [x, y] \in M, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

$$\vec{u} = \text{grad}(A) = (F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$$



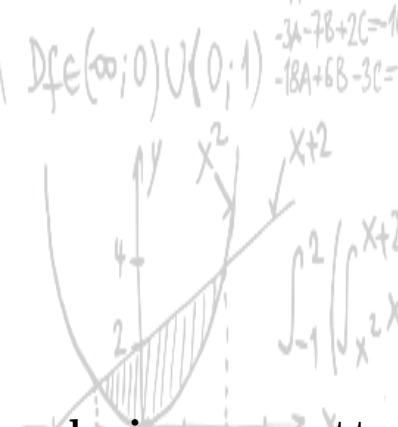
$$\frac{\sin x}{x} \leq \frac{x}{x} = 1$$

$$\Psi(x, y) = \int_{[x_0, y_0]}^{[x, y]} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix} (A)$$



$$X_1 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

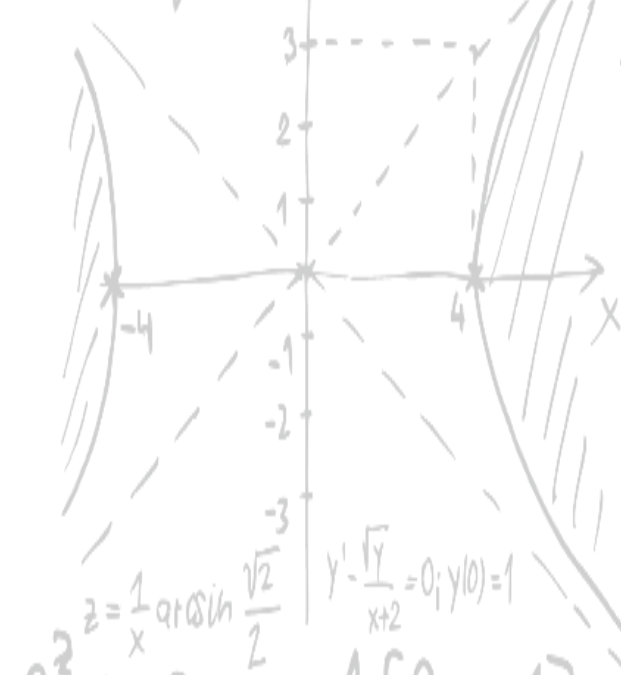


$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^{x+2} x y dy dx$$

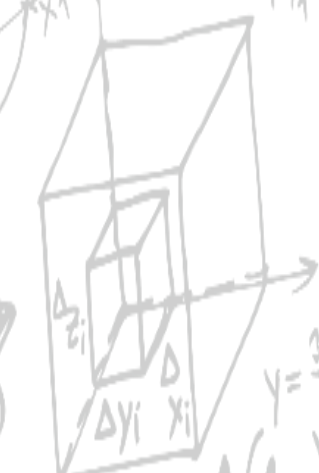
Formulario compatto di Probabilità e Statistica

Di Agostino Manuel
Gennaio 2023

$$R_0 = \frac{\sqrt{1000}}{3\sqrt{\pi}} \approx \frac{10}{3\sqrt{\pi}} \approx 7$$



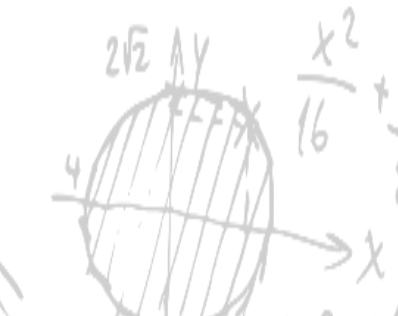
$$x \in \mathbb{R}$$



$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = K_i$$

$$\int R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$$

$$\Delta(A_2) = \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}$$



$$e^z - xyz = e; A[0; e; 1]$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

1 Combinatoria

- Permutazioni semplici n elementi: $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$
- Combinazioni semplici classe k : $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Disposizioni semplici classe k : $D_{n,k} = P_k \cdot C_{n,k}$
- Principio inclusione-esclusione: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Probabilità condizionata: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- I formula di Bayes: $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$
- II formula di Bayes: $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)}$
- Eventi indipendenti:
 - $P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
 Vale anche $P(B|A) = P(B)$ e sono indipendenti anche gli eventi (A, B^c) , (A^c, B) e (A^c, B^c) .

2 Variabili aleatorie

- (CdF) Funzione di ripartizione: $F_X(t) := P(X \leq t)$
- Trasformazioni lineari: $Y := aX + b$, $a \neq 0$

$$F_Y(t) = F_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \Rightarrow f_Y(t) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

3 Vettori aleatori

- Leggi marginali

$$f_X(s) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(s,t) dt \quad \wedge \quad f_Y(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(s,t) ds$$
- CdF congiunta

$$F_{X,Y}(s,t) := P(X \leq s, Y \leq t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s f_{X,Y}(s,t) ds dt$$
- Indipendenza
 - continuo: $f_{X,Y}(s,t) = f_X(s) \cdot f_Y(t)$
 - discreto: $\varphi_{X,Y}(s,t) = \varphi_X(s) \cdot \varphi_Y(t)$
 - generale: $F_{X,Y}(s,t) = F_X(s) \cdot F_Y(t)$
 Si dimostra che se $\exists g, h \mid f_{X,Y}(s,t) = g(s) \cdot h(t)$ allora f, y sono indipendenti e $f_X(s) = g(s)$, $f_Y(t) = h(t)$

- Leggi condizionali su vettori aleatori
 - continuo: $f_{X|Y}(s|t) = \frac{f_{X,Y}(s,t)}{f_Y(t)}$
 - discreto: $\varphi_{X|Y}(k|j) = \frac{\varphi_{X,Y}(k,j)}{\varphi_Y(j)}$
- Legge di una funz. di un vett. aleatorio
 - Somma: siano X, Y indipendenti e non negative e $S := X + Y$ allora

$$f_S(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(u, t-u) du = \int_{\mathbb{R}} f_Y(t-v, v) dv$$
 - Minimo & Massimo: siano X_1, X_2, \dots, X_n vv.aa. indipendenti e $R := \min(X_i)$, $T := \max(X_i)$ allora

$$F_T(t) = \prod_i F_{X_i}(t) \quad \wedge \quad 1 - F_R(t) = \prod_i (1 - F_{X_i}(t))$$

- Valore atteso
 - discreto: $E(X) := \sum_k k \cdot \varphi_X(k)$
 - continuo: $E(X) := \int_{\mathbb{R}} t \cdot f_X(t) dt$
 - costante $a \in \mathbb{R}$: $E(X) = a$
 - Teorema

Sia X v.a. con pdf $f_X(t)$ o pmf $\varphi_X(k)$ e una funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Y = g(X)$ allora

$$E(Y) := \sum_k g(k) \cdot \varphi_X(k) \quad \wedge \quad E(Y) := \int_{\mathbb{R}} g(t) \cdot f_X(t) dt$$

In presenza di un vettore aleatorio X, Y e $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Z = h(X, Y)$ allora

$$E(Z) := \sum_j \sum_k h(j, k) \cdot \varphi_{X,Y}(j, k)$$

$$E(Z) := \iint_{\mathbb{R}^2} h(u, v) \cdot f_{X,Y}(u, v) du dv$$
 - vv. aa. positive: $E(X) = \int_0^\infty [1 - F_X(t)] dt$

- Covarianza
 - Definizione

$$Cov(X, Y) := E(XY) - E(X)E(Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$
 - La covarianza è simmetrica e bilineare:

$$Cov\left(\sum_i^n a_i x_i, \sum_j^n b_j y_j\right) = \sum_i^n \sum_j^n a_i b_j \cdot Cov(x_i, y_j)$$
 - se X, Y indipendenti $Cov(X, Y) = 0$

- Varianza
 - $Var(X) := E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$
 - $Cov(X, X) \equiv Var(X)$
 - $Var\left(\sum_i^n X_i\right) = \sum_i^n Var(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(X_i, X_j)$
 - $Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$
- Moda

È l'insieme delle controimmagini dei valori più probabili di una v. a.
- Mediana

Se esiste è un numero $M_X: P(X \leq M_X) = P(X \geq M_X)$. Si trova ponendo $F_X(M_X) = \frac{1}{2}$

4 Legge debole dei grandi numeri

- Disuguaglianza di Markov

Se X v. a. non negativa allora $\forall a \in \mathbb{R} \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$
- Disuguaglianza di Chebyshev

Se X v. a. non negativa allora $\forall a \in \mathbb{R}$

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$
 ponendo $\mu = E(X)$, $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ si ha

$$P(|X - E(X)| \geq a \cdot \sigma) \leq \frac{1}{a^2}$$

- Legge debole

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

5 Esempi notevoli

- Bernoulliana $bin(1, p)$

Considera un esperimento con due esiti possibili; generalmente successo con probabilità p e insuccesso con probabilità $1 - p$.

$$\varphi_X(k) = \begin{cases} p & k=0 \\ 1-p & k=1 \end{cases}$$

$$E(X) = p, \quad Var(X) = p(1-p)$$

- Binomiale $bin(n, p)$

Modella la realizzazione di n ripetizioni indipendenti di un esperimento, ciascuna delle quali può concludersi con un successo (prob. p) o insuccesso (prob. $1 - p$); X è il numero di successi.

$$\varphi_X(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = np, \quad Var(X) = np(1-p)$$
 - È riproducibile: se le due v.a. indipendenti allora

$$bin(n_1, p) + bin(n_2, p) = bin(n_1 + n_2, p)$$
 - Si approssima con $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ (e correzione di continuità) se $n \geq 2, 3$

- Poissoniana $pois(\nu)$

Si usa quando n cresce in maniera arbitraria e p è piccolo. μ è il numero medio di successi.

$$\varphi_X(k) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = Var(X) = \nu$$
 - È riproducibile: $pois(\nu_1) + pois(\nu_2) = pois(\nu_1 + \nu_2)$
 - Si approssima con $\mathcal{N}(n\nu, n\nu)$ se $\nu \geq 20, 30$

- Uniforme $unif(a, b)$

Due parametri a e b , estremi dell'intervallo. $V_x = [a, b]$

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & a < t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$
 - Trasformazioni lineari: $unif \rightarrow unif$
 - Se $U \sim unif(a, b)$ e $V := mU + q$, $m \neq 0$ allora $V \sim unif(ma + q, mb + q)$

- Esponenziale $expo(\lambda)$

Prevede un parametro λ detto rate o tasso di accadimento. $V_x = [0, +\infty)$.

$$f_X(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$
 - Omotetie: $expo \rightarrow expo$

$$\alpha \cdot expo(\lambda) = expo\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0$$
 - Assenza di memoria:

$$P(T > t + t_0 | T > t_0) = P(T > t) \quad \forall t, t_0 > 0$$

- Minimo di esponenziali indipendenti
Siano $T_1 \sim expo(\lambda_1), T_2 \sim expo(\lambda_2), \dots, T_n \sim expo(\lambda_n)$ indipendenti, allora

$$S := \min\{T_i\} \sim expo(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$$

- Si approssima con $\mathcal{N}(\frac{n}{\lambda}, \frac{n}{\lambda^2})$ se $n \geq 20, 30$

- **Gaussiana o normale** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F_X(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

$$E(X) = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2$$

- Trasformazioni lineari: $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$

$$Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), X := aZ + b \Rightarrow X \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

- Valori notevoli:

$$P(|X - \mu| \leq \sigma) \approx 69.3\%$$

$$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \approx 95.5\%$$

$$P(|X - \mu| > 3\sigma) \approx 0.27\%$$

- Simmetrie :

$$\Phi(-\alpha) = 1 - \Phi(\alpha) \quad , \quad \Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

- È riproducibile:

$$\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) + \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) = \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- **Teorema del limite centrale (TLC)**

Siano X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. con $E(X_i) = \mu, \text{Var}(X_i) = \sigma^2$ allora

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

$$Z_n := \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\bar{X}_n := \frac{S_n}{n} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

- **Chi quadro** $\chi^2(n)$

È somma di quadrati di $\mathcal{N}(0, 1)$; ha un parametro n , il numero di Gaussiane da sommare. $V_x = (0, +\infty)$

$$f_{\chi_n^2}(t) = c_n \cdot t^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \quad t > 0$$

$$E(\chi_n^2) = n, \text{Var}(\chi_n^2) = 2n$$

- È riproducibile:

$$\chi^2(n_1) + \chi^2(n_2) = \chi^2(n_1 + n_2)$$

- Collegamento con variabili aleatorie esponenziali

Siano $T_1, T_2, \dots, T_n \mid T_i \sim expo(\lambda)$ i.i.d. allora

$$2\lambda(T_1 + T_2 + \dots + T_n) \sim \chi^2(2n)$$

- Per valori grandi di n :

$$F_{\chi^2(n)}(t) \sim \Phi\left(\frac{t-n}{\sqrt{2n}}\right), F_{\chi^2(n)}^{-1}(t) \sim n + \sqrt{2n}\Phi^{-1}(t)$$

- **t_n di Student**

Ha un parametro n che indica i *gradi di libertà*. Date Z normale standard e $C_n \sim \chi^2(n)$ allora

$$f_{t_n}(t) = \frac{Z}{\sqrt{\frac{C_n}{n}}}$$

$$E(t_n) = 0 \quad n \geq 2, \text{Var}(t_n) = \frac{n}{n-2} \quad n \geq 3$$

- La funzione di ripartizione ha le stesse proprietà di quella della gaussiana

Incognita	Funzione ancillare	V.a. di appr.
μ	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$	$\mathcal{N}(0, 1)$
	$\frac{\bar{X} - \mu}{S_x} \cdot \sqrt{n}$	$t(n-1)$
σ	$\frac{S_x^2}{\sigma^2} \cdot (n-1)$	$\chi^2(n-1)$
	$\frac{\tilde{S}_x^2}{\sigma^2} \cdot n$	$\chi^2(n)$
[nei test]	$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$	$\mathcal{N}(0, 1)$
p [negli intervalli]	$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$	$\mathcal{N}(0, 1)$
λ	$2n \cdot \lambda \bar{X}$	$\chi^2(2n)$
$\mu_x - \mu_y$ [$\sigma_x \approx \sigma_y$]	$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}}}$	$\mathcal{N}(0, 1)$
	$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{S_x^2}{m} + \frac{S_y^2}{n}}}$	$\mathcal{N}(0, 1)$
	$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$
σ	$\frac{S_p^2}{\sigma^2} \cdot (m+n-2)$	$\chi^2(m+n-2)$

- Lo stimatore pooled $S_p \approx \sigma$ è dato da

$$\sqrt{\frac{m-1}{m+n-2} \cdot S_x^2 + \frac{n-1}{m+n-2} \cdot S_y^2}$$

- **Curva operativa e potenza del test**

La funzione che dà $P(\text{dire } H_0)$ in funzione di un parametro θ si chiama curva OC.

$$h(\theta) := P_\theta(\text{dire } H_0)$$

Ricordando che

$$P(\text{err. I sp.}) = P(\text{dire } H_1 \mid \text{vera } H_0) = \alpha$$

$$P(\text{err. II sp.}) = P(\text{dire } H_0 \mid \text{vera } H_1) = \beta$$

allora

- se vera H_0

$$\alpha = 1 - h(\theta)$$

- se vera H_1

$$\beta = h(\theta)$$

$$\text{potenza del test: } 1 - h(\theta) = P(\text{dire } H_1)$$

6 Statistica

- **Media campionaria**

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- **Deviazione standard campionaria**

$$S_x := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\tilde{S}_x := \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2} \quad , \quad \mu \text{ nota}$$

